



TITLE:

粘性流体中を運動する天体の受ける抵抗(II)(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

武田, 英徳; 松田, 卓也; 沢田, 恵介; 林, 忠四郎

CITATION:

武田, 英徳 ...[et al]. 粘性流体中を運動する天体の受ける抵抗(II)(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 539: 292-312

ISSUE DATE:

1984-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98717>

RIGHT:

粘性流体中を運動する天体の受ける抵抗(II)

京大 工 武田英徳 (Hidenori Takeda)

京大 工 松田卓也 (Takuya Matsuda)

川崎重工業 沢田恵介 (Keisuke Sawada)

京大 理 林忠四郎 (Chushiro Hayashi)

§ 1 序論

原始太陽系星雲中に微惑星とよばれる、半径 $\approx 10\text{km}$ 、特徴的質量 $\approx 10^{18}\text{gm}$ の多数の天体が生まれ、この微惑星が相互に衝突し、合体することによりさらに大きくなり、原始の惑星となる。この原始惑星は、さらに微惑星を捕らえ成長し、最終的には現在見られるような惑星が形成される^④。これらの天体の成長の *time-scale* は衝突の相対速度 ($\approx eV_k$) と、その重力圏の大きさ ϵ に依存する。ここで ϵ は天体運動の離心率、 V_k は Kepler

^④ この報告は前回の報告の続編である。太陽系形成の歴史、惑星成長と、それら、まわりのガスから受ける抵抗の関係については、「数研講究録 510, p.295」に今少し詳しく書いてある。今回は主として、前回の報告以後得た結果を、つけ加えるという形ですとめた。

速度である。天体に働く粘性抵抗は、その運動を、太陽まわりの円運動とする、ガスの運動に近づける向きに働く。即ち ϵ を減少させ、(相対速度を減らし) 重力圏を増加させる(衝突の断面積を増す)。粘性抵抗は惑星形成の *time-scale* を決める要因の一つである。

流体中を運動する物体は、理論的・又実験的に調べられているが、我々が興味を持っているような天体に働く粘性抵抗の計算は行われていなかった。天体の一つの大きな特徴は、重力が重要な役割を果たしていることである。太陽系星雲で生まれる“粒子”も、大きくなるにつれて、その重力の影響が強くなる。そこで我々は重力源である球状固体粒子が、ガス中を等速度運動をしている場合に受ける抵抗の大きさを、数値シミュレーションによって求めた。

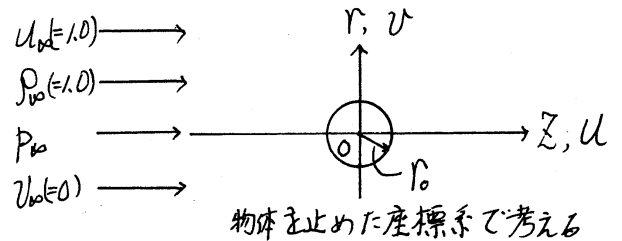
一つの目安として、パラメーターの大きさを書いておく。
質量 $M_s \approx 10^{25} \text{ gm}$, 半径 $R_s \approx 10^8 \text{ cm}$, ガス (H_2 が主成分) の音速 $c_s \approx 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$
 $\rho_g \approx 10^{-9} \text{ gm/cm}^3$. 分子粘性を用いてレイノルズ数を計算すると極めて大きい値になるが、現実には乱流粘性によりそれ程大きくはないと思われる。又平均的流れ場を問題にするのなら、レイノルズ数 40~50 の定常流を考えればよい^④。我々の主たる興味は“物体の受ける抵抗は、その重力の強さとどのような関係が

^④ 今井功 「科学」 1958年 vol 28 No 3. P110

あるか”にある。そこでシミュレーションを行い、易い比較的小さなレイノルズ数(10, 20, 40)の流れの計算を行った。

§2 数値計算の方法

球状物体のまわりの流れの軸対称性を仮定する。流れは、無限遠で一様流とし、次の円柱座標で与えられた方程式を解く。



$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho + \rho v^2 \\ (e + p)v \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (e + p)v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f^z \\ \rho f^r \\ \rho (uf^z + vf^r) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zz} \\ \tau_{rz} \\ \frac{\mu}{Pr} \bar{e}_z + u\tau_{zz} + v\tau_{zr} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rz} \\ \tau_{rr} \\ \frac{\mu}{Pr} \bar{e}_r + u\tau_{rz} + v\tau_{rr} \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{rz} \\ \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} \\ \frac{\mu}{Pr} \bar{e}_r + u\tau_{rz} + v\tau_{rr} \end{bmatrix} \quad (\text{式-1})
 \end{aligned}$$

ここで ρ は密度, u, v はそれぞれ速度の, z, r 方向成分である。

ガスを比熱比 γ の理想気体とすると、単位質量当りの内部エネルギー \bar{e} は、 $\bar{e} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}$ と表わされる。又 $e = \rho(\bar{e} + \frac{u^2+v^2}{2})$ であり、重力の成分は、 $f^z = -\frac{GM_* z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$ 、 $f^r = -\frac{GM_* r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$ である。 Pr はプラントル数である。 μ は粘性係数で、 $\tau_{zz} = \mu(2u_z - \frac{2}{3} \text{div } v)$ 、 $\tau_{zr} = \mu(u_r + v_z)$ 、 $\tau_{rr} = \mu(2v_r - \frac{2}{3} \text{div } v)$ 、 $\tau_{\theta\theta} = \mu(2\frac{v_r}{r} - \frac{2}{3} \text{div } v)$ である。数値計算は、 $Pr=0.75$ 、 $\mu=\text{const.}$ として、(式-1) を Implicit Factored Method^(*) により、差分化して解いた。

座標系としては、簡単の為に、球座標を採用し、半径方向に60分割 $[(\Delta R)_1=0.1R_0, (\Delta R)_n=1.0 \cdot (\Delta R)_{n-1} \cdot R_0, R_{61}=304.48 \cdot R_0]$ 、角度方向には15等分した grid points を用いた。物体表面は断熱としその条件を定式化し、又、運動方程式から $\frac{\partial p}{\partial R} = f_n(r, z)$ の形の式を求め、両式を差分化して、表面での、 T (温度)、 p を解いた。ここで $u=0, v=0$ とした。流入境界では、 $p=p_0 (=1.0)$ 、 $u=u_0 (=1.0)$ 、 $v=v_0 (=0.0)$ 、 $p=p_0$ の4つの量を与え、流出境界では、 p, p, u, v の値を内側から外側方向に外挿して求めた。時間を追った計算を、物理量の変動しなくなるまで続けるという方法で、定常状態を求めた。最初、重力 $=0$ の場合の計算を行い、順次、重力の

^(*) 実際の数値計算では重力に“cut-off”を入れた。即ち、重力成分 f^z, f^r に factor $\exp[-(\frac{R}{100R_0})^2]$ を掛けただけを用いた。ここで $R = \sqrt{r^2+z^2}$ 、 R_0 は天体の半径である。

^(**) Beam and Warming, AIAA Journal vol 16 No 4 (1978) p393

Kutler et al. AIAA Paper 78-213 (1978)

より強い場合の定常値を求めて行った。

§3 数値計算の結果と議論

図-1で 重力=0, Mach数, $M_\infty=0.5$ のときの数値計算で得た粘性係数を実験による値と比較する。計算値が実験値とよく合っているが、これは数値計算が良い精度で行なわれていることを示すものと思われる。

さて、先ずはじめに、亜音速の流れ ($M_\infty \leq 1.0$) を考えよう。基本的性質は前回述べたものに等しい。重力の強さを示すパラメータ Γ を $\Gamma = \frac{GM_\infty}{r_0 V_\infty^2}$ で定義する。

(i) $M_\infty=0.5$, $Re=20$, $\gamma=1.4$, ($P_\infty=2.852$) (前回の Re の定義では, $Re=10$)

前回 $\Gamma=0, 2, 6$ の場合を図11~13に示した。 $\Gamma=9$ の場合を図3として加える。重力が強まったせいで、物体はより濃い、より圧力の高い“大気”でとりかこまれる。渦領域も大きくなっている。物体前方・後方での $\rho(R)$ を図2-(a)に示す。前後方での密度差はそれ程大きくはない。

(ii) $M_\infty=0.7$, $Re=20$, $\gamma=1.4$, ($P_\infty=0.496$)

図4, 5, 6に、それぞれ、 $\Gamma=0, 1, 6$ の場合の、等密度線、等圧線、速度場を示す。図-7は抵抗の成分の Γ 依存性を表わす。流れ場の基本的性質は、(i) の $M_\infty=0.5$ の場合と同じである。

$\Gamma=0$ の場合、球の上流側よどみ点で p, ρ が最大となり、上流側対称軸から測った角度 θ が、 $\theta \approx 110^\circ$ のところで最小となる。図4-5と Γ が大きくなるにつれて次第に密度・圧力の高いガスでとりかこまれるのがわかる。物体後方部分に、物体と同じ程度の大きさの渦が見られる。超音速流の場合全体を通じて言えることであるが、物体表面の圧力の大きさは、重力ポテンシャル

$$\text{として、} \frac{u_\infty^2 + v_\infty^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} + \Phi(R) = \frac{u_\infty^2 + v_\infty^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} + \Phi(R_{\max}); p \propto \rho^\gamma$$

から得られるものとよく合う。 $(u_0=0, v_0=0)$ [但し重力がある程度強い場合]、 Γ が小さい場合 p は上流側物体表面で最大となるが、 Γ が大きくなるにつれ、物体後方での密度が高くなる。従って最初 D_G は負になり、重力部分は推力として働くが、 Γ が大きくなると、物体後方のガスによる重力が強くなり、重力部分は抵抗として効いて来るようになる。図-7の D_G の変化がこの状況を表わしている。 $\Gamma=0$ のとき $\theta=0$ で $p=p_{\max}$ となるが Γ が増大するにつれ、後方に移動する。従って D_p は減少し、ついには負となる。渦が発生すると、その領域の物体表面近くで起る逆流によって、物体は前方に引きずられる。これが Γ で D_v が減少する理由である。これらを加え合わせた全抵抗値 D_t は常に正であり、一度減少するもののその後は Γ とともに次第に増加する。この事情は遅い流れの場合と傾向は変わらない

(板井^④). $M_\infty = 0.5$ ($M_\infty = 1.0$) の場合は, T -依存性がゆるやかに(きつく)なるが, 基本的性質は同じである。($M_\infty = 1.0$ の場合の図7に対応する図は省略する).

重力場中の断熱非粘性圧縮性流体の重力源から離れたところでの解は, 次の式で与えられる。^{④⑤} (C_∞ は無限遠での音速.)

$$P = P_\infty + GM_* \rho_\infty \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 + \lambda^2 r^2}}, \quad \rho = \rho_\infty + \frac{GM_* \rho_\infty}{C_\infty^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 + \lambda^2 r^2}}, \quad \lambda^2 = 1 - M_\infty^2$$

上式による等圧線は楕円となる。図3, 6 はこれをよく表わしている。等密度線は物体後方で楕円からずれており, これは伴流領域で密度が少し高くなっていることを示す。

さて, 今少し, 物体から離れたところを考えよう。ここでは粘性の効果は小さいであろう。それゆえ, (式-1) で, $\mu = 0$ とおいて考えることにする。但し流れは定常と仮定する。

$Q(r, z, M_*)$ ($Q = P, \rho, u, v$) がこの式の解であるとする, $Q(\alpha r, \alpha z, M_*/\alpha)$ も解である。これは r に対する解と, r/α に対する解が (物体から離れた粘性と, 物体表面の境界条件が効かない領域で) 相似であることを意味する。図-8 の (a), (b) は, それぞれ $P=4.0$ と $T=6.0$ の場合の等密度線を示す。図の大きさ α の

^④ T. Sakurai, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. (1983), vol. 24, p. 225

^{⑤⑥} V. P. Dokuchaev, *Soviet Astronomy-AJ*. (1964) vol. 8 No. 1, p. 23

C. K. W. Tam, *Phys. Fluids*. (1966) vol. 9 no. 3 p. 493

比, α , は 0.7 である。両図はよく一致し, 上の考えを支持する。

つぎに $M_\infty > 1$ の流れを考えよう。 $M_\infty = 2.0$ と $M_\infty = 1.2$ の2つの場合の数値計算を行った。 $M_\infty = 2.0$ の場合, $T=0$ の流れは物体後方に, ρ, p の小さい部分を生じ, 計算の *time-step* が小さくなり, 定常状態に達するまで計算を続けることができなかった。最小の Γ として 0.2 をとった。図-9 にこの場合の ρ, p の等高線及び速度場を示す。 $T=0.85$ の場合を図-10に示す ($M_\infty = 1.2$ の場合も基本的性質は同じゆえ, ρ, p , 流れ場の図は, 載せていない。) これらの図より, 物体前方から上後方にかけて衝撃波が存在し, この面を通して密度・圧力が急激に増加することがわかる。これは前方後方における密度の R -依存を示す図-2(b)からもわかる。図-11(a), (b)にそれぞれ $M_\infty = 1.2, 2.0$ の場合の抵抗値の成分ごとの Γ -依存性を示す。 D_p, D_v, D_g の変化の傾向は亜音速の場合に似ているが, その特徴は, Γ への依存性が強いということである。特に重力による項 D_g において, その性質が著しい。これは図-2(b)でもわかることだが, 物体後方の密度の落ち方がゆるやかで, この部分により後方に引く重力が, 大きい抵抗値を与える。

計算した8つの場合の, 全抵抗係数の Γ -依存性を図-12に示す。表示した値は, 基準とする BB の値と異なるもののみを示す。例えば $Re=10$ の曲線は, $M_\infty=0.5, \gamma=14, \underline{Re=10}$ という意味で

ある。 $Re=10$, $BB (Re=20)$, $Re=40$ の3つの曲線と比較することにより、レイノルズ数を変えたときの C_D の変化を見ることが出来る。計算した範囲では、 C_D の比はだいたい $1/1.6 : 1 : (1.5 \sim 1.42)$ となっている。 $\gamma=1/1$ の場合は、 BB に比べて、次の特徴をもつ。流れはより等温的^④であり、物体近くの密度・圧力は BB の場合よりも大きい。前後の対称性がよくなり C_D は小さくなる。 $Mach$ 数が大きくなると、抵抗値の T -依存性は強くなる。ことに $M_0 > 1$ となると、小さな T に対しても物体前後の密度の非対称性は強まり C_D は急速に大きくなる。(図-2)。

極超音速の極限の理論では、 $C_D = 4 \cdot T^2 \cdot \beta$ となる。^{④⑤} そこで $C_D = D_t$ を、 $D_t = a + b T^2$ の形でフィットさせてみたが、これは $T=0$ の近くを除いて、数値計算の結果をよく再現することがわかった。7つの場合について、この a, b を表で与えておく。(次頁表-1)。

かつての惑星形成の理論では、重力を無視した場合 ($T=0$) の抵抗値を用いて、その成長の *process* を計算していた。重力を考えに入れると、その抵抗値は大きくなり、成長時間は、

④ 完全に等温な場合抵抗値が収束せず、計算はうまく行かなかった。

⑤ ④ 例えば、S. Yabushita, *Mon. Not. R. astr. Soc.* (1978); 182 p271 以下 p459 を見よ。
accretion の理論では、物体後方に *accretion column* とよばれる円柱状の密度の高い領域ができる。これの及ぼす重力で物体が後方に引かれる。この *column* の長さ l をとると、 β は例えば $\beta = \ln \frac{V_0^2 r_c}{G M_{\star}}$ と書ける場合がある。

以前の推定値よりも小さくなる。正確な値を得るには、詳しい計算を要する。荒っぽい推定によれば、惑星成長時間は、これまでの $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{3}$ 程度 になると思われる。

計算には、東京天文台野辺山宇宙電波観測所の M200 を使用させていただいた。お礼申し上げます。一部の計算には京都大学大型計算機センターの M382 及びベクトルプロセッサを使用した。

Case	M_{∞}	Re	γ	a	b
1	0.5	20	1.4	2.03	0.0539
2	0.5	20	1.1	1.69	0.0328
3	0.5	10	1.4	1.37	0.0390
4	0.7	20	1.4	1.91	0.142
5	1.0	20	1.4	2.16	0.769
6	1.2	20	1.4	4.36	15.1
7	2.0	20	1.4	2.13	27.0

表-1. C_0 を $C_0 = a + b \cdot P^2$ ($P = \frac{GM_1}{r_0 v_0^2}$) と近似したときの, a, b の値を示す。

図-1

数値計算と
実験値の比
較。縦軸は
抵抗係数,
横軸はレイ
ノルズ数。
数値計算は
 $M=0.5, Pr=0.75, \beta=14$

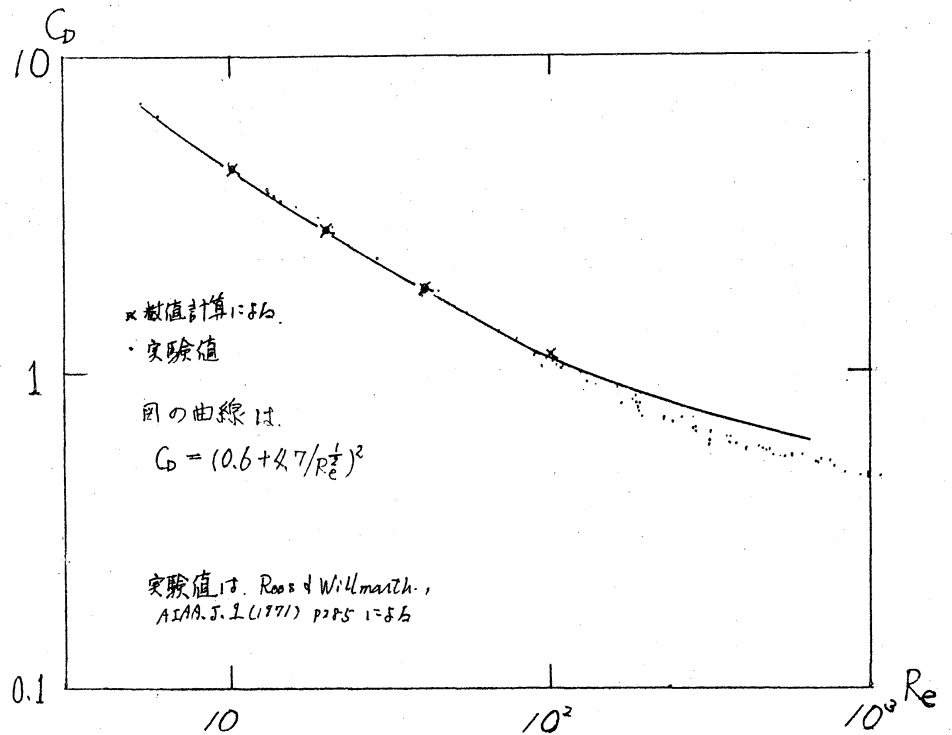


図-2-(a)

物体の前方,
後方の密度変
化。横軸は物
体中心からの
距離, $M=0.5$

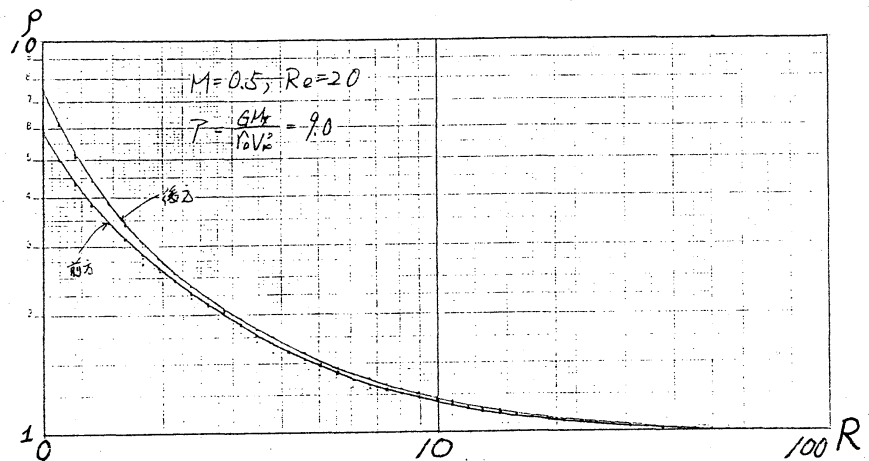
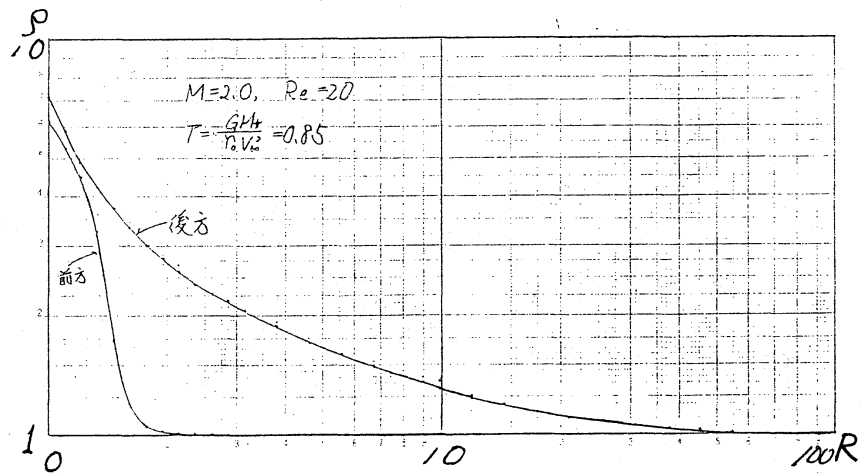


図-2-(b)

対称軸に沿っ
た密度変化。
 $M=2.0$
($R = \sqrt{r^2 + z^2}$)

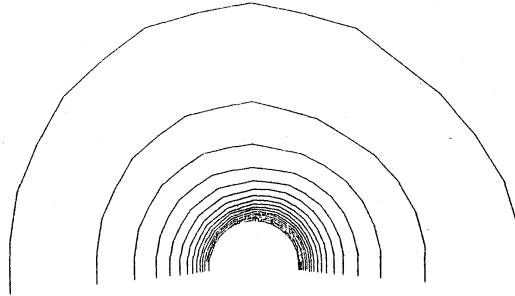


(a) 等密度線

$$\rho = 7.6 \sim 1.43 \times 5 \text{ を}$$

19等分 (等高線は20本)

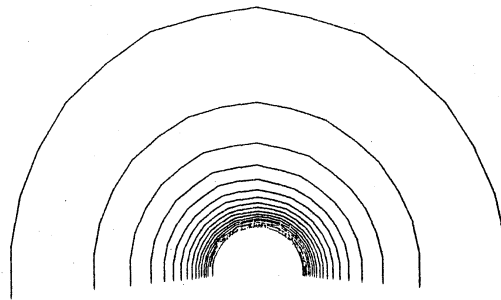
最も内側の半円が、物体
表面をあらわす。



(b) 等圧線

$$p = 3.5 \sim 4.71 \text{ を}$$

19等分。



(c) 速度場

最長の矢は、
速さ = 1.0 を表
わす。

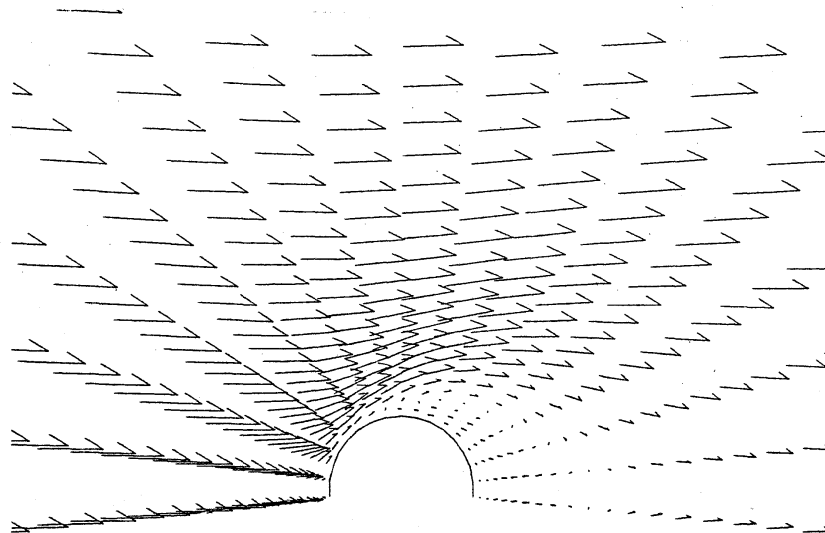
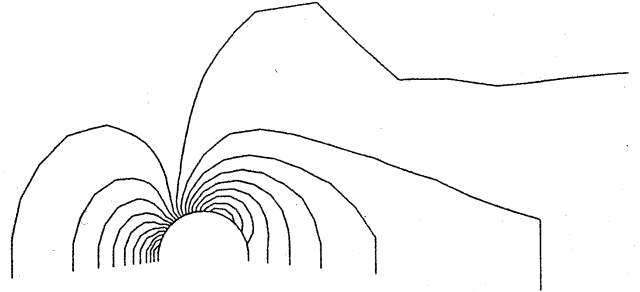
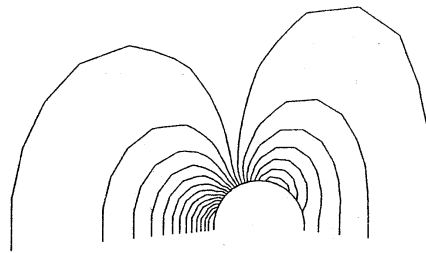


図-3 $Re=20$ (前回の $Re=10$) , $\frac{GM}{R_0 V_0^2} = F = 2.0$, $M_0 = 0.5$, 重力 $f = \frac{GM}{r^2} e^{-\left(\frac{R}{\cos \theta}\right)^2}$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$

(a) - 等密度線

 $\rho = 1.35 \sim 0.699$ 在 20 分割

(b) - 等压線

 $P = 2.1 \sim 1.077$ 在 20 分割

(c) - 速度場

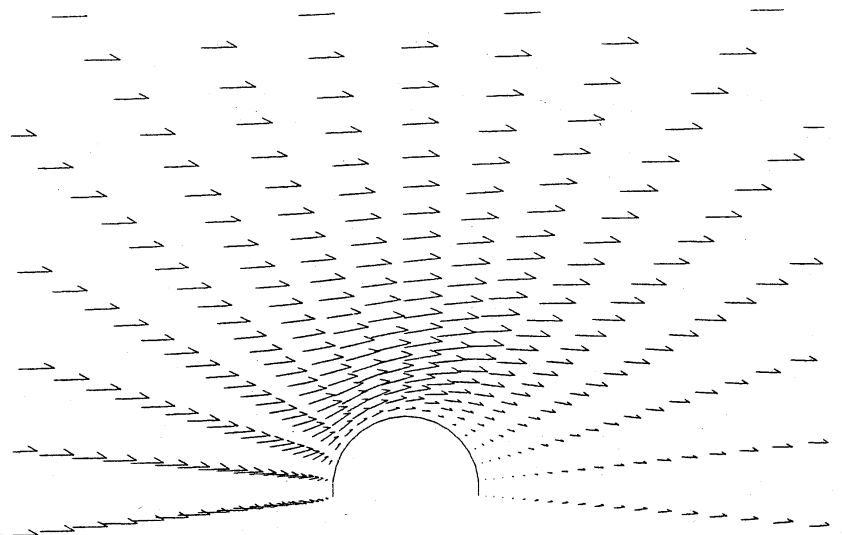
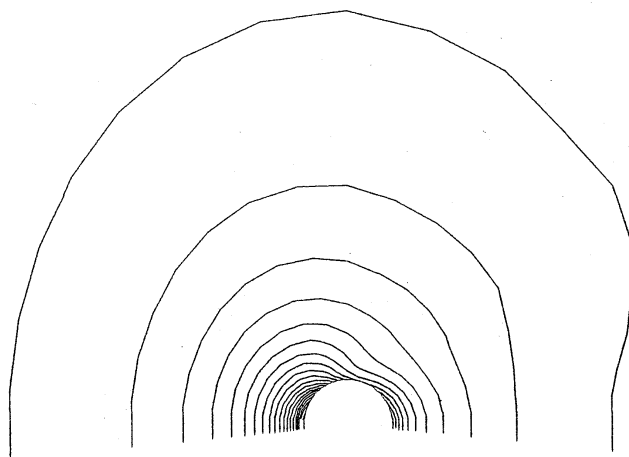
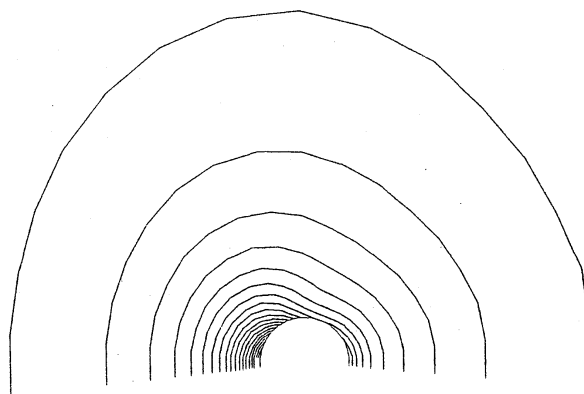
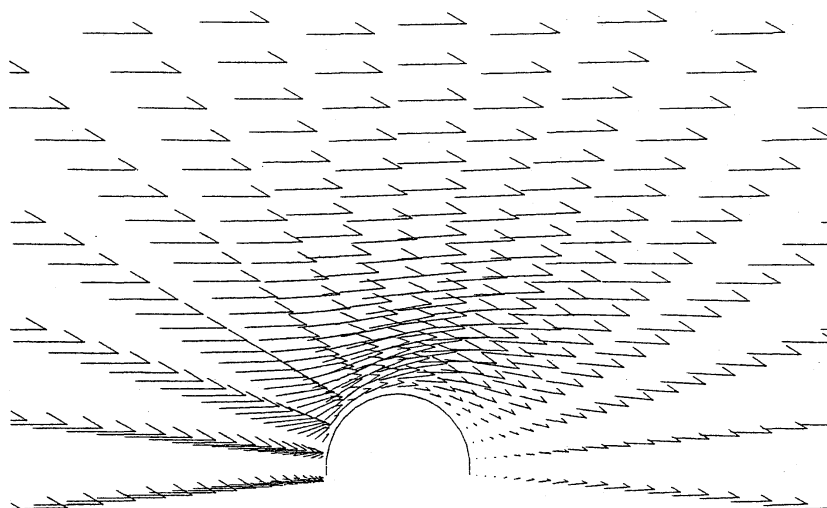


图 - 4 $Re = 20$, $\frac{GM_0}{\rho_0 V_0^2} = T = 0.0$, $M_0 = 0.7$

(a) - 等密度線 $\rho = 2.0 \sim 1.013$ 註

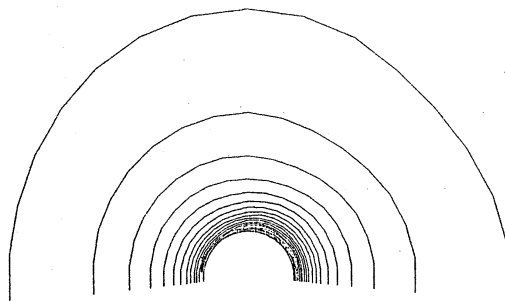
20 等分

(b) - 等压線 $p = 3.7 \sim 1.503$ (c) - 速度場圖 - 5 $Re = 20$, $\frac{GM_x}{V_\infty^2 r_0} = T = 1.0$, $M_\infty = 0.7$

(a) - 等密度線

$$\rho = 1.1 \sim 1.142 \text{ 克}$$

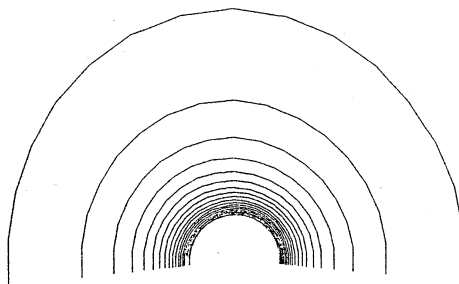
20 分割



(b) - 等圧線

$$p = 27.0 \sim 3.01725 \text{ 克}$$

19 等分



(c) - 速度場

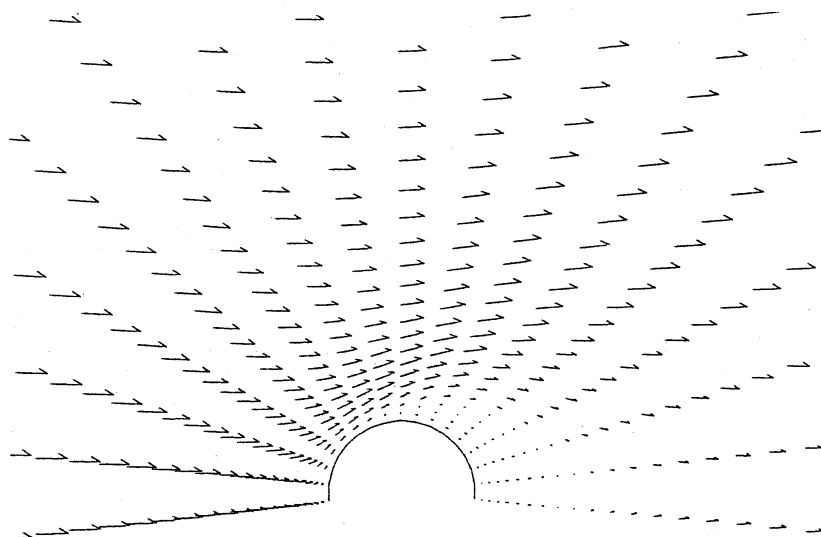
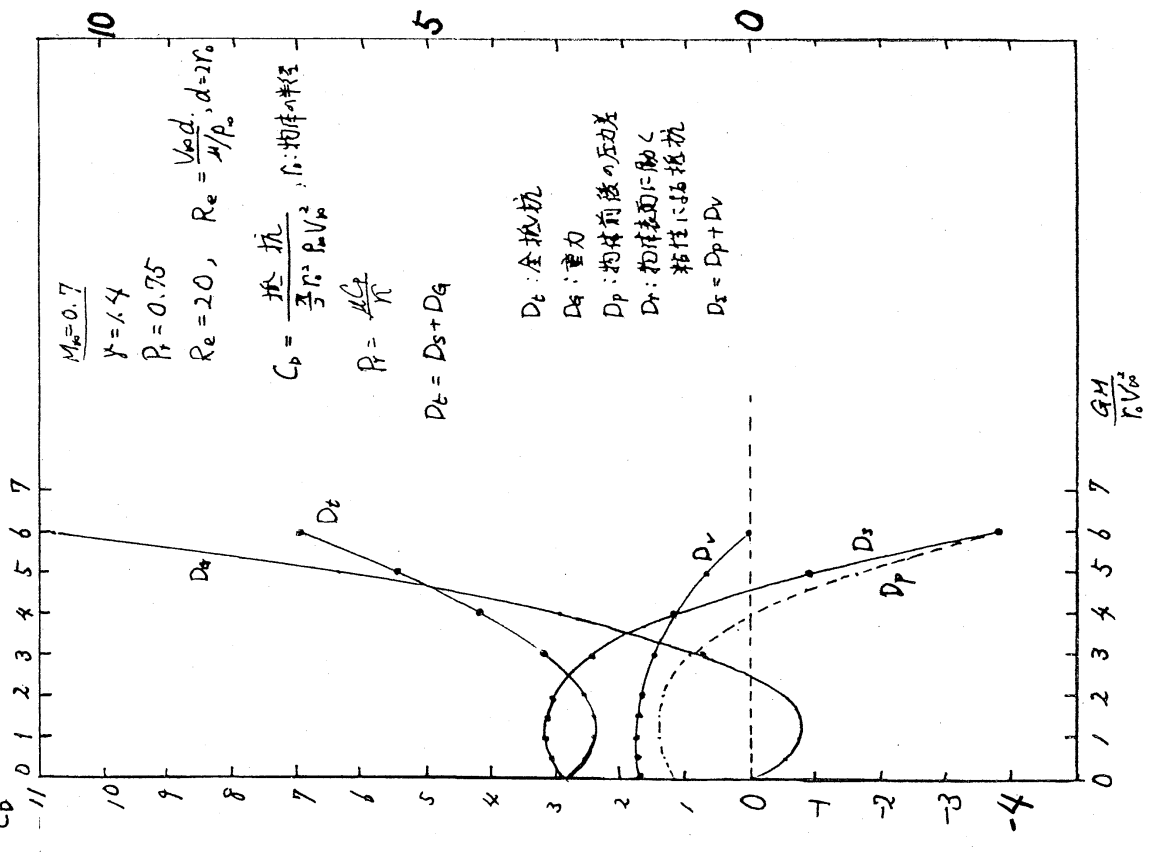
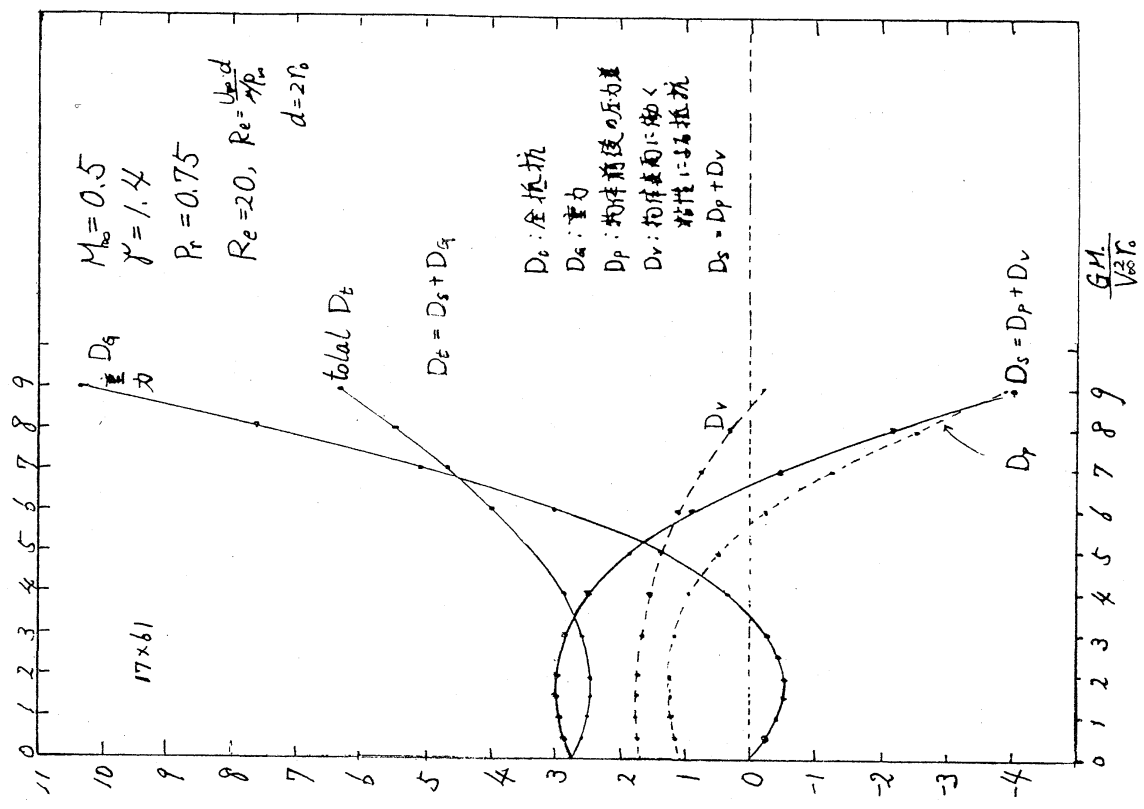


図 - 6 $Re=20, \frac{GM_0}{r_0 V_0^2} = P = 6.0, M_0 = 0.7$

図-7. 抵抗の γ 依存性 (要音速)

←(a) (b) ↓

抵抗係数 = 抵抗 / (平均 ρ と V_0^2) : r_0 : 物体の半径



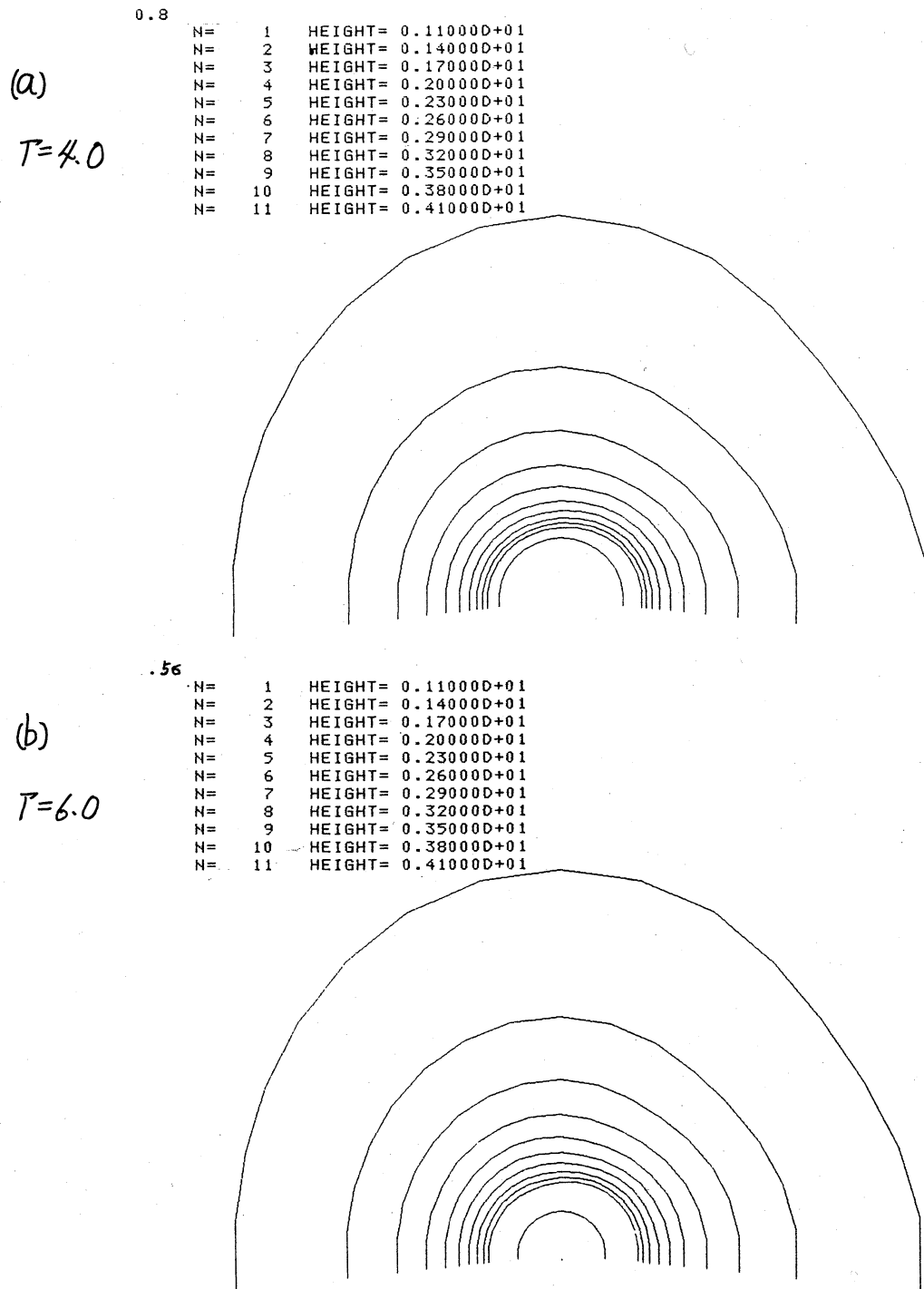
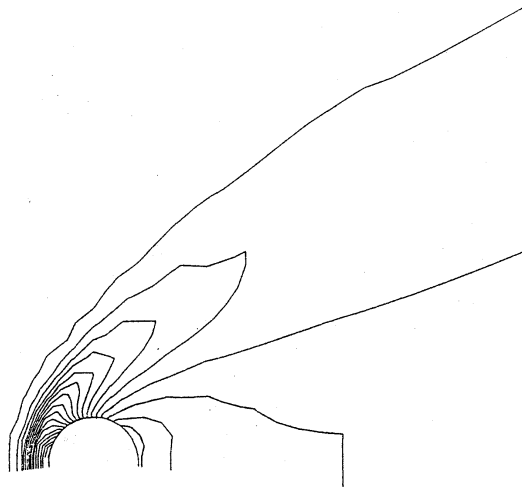


図-8 解の相似性 $Re=20, M_\infty=0.7$, 一層内側の半円は、
 物体の表面を表わす。図(b)の大きさは図(a)の0.7倍

図-9. $Re=20$, $T=0.2$, $M_\infty=2.0$

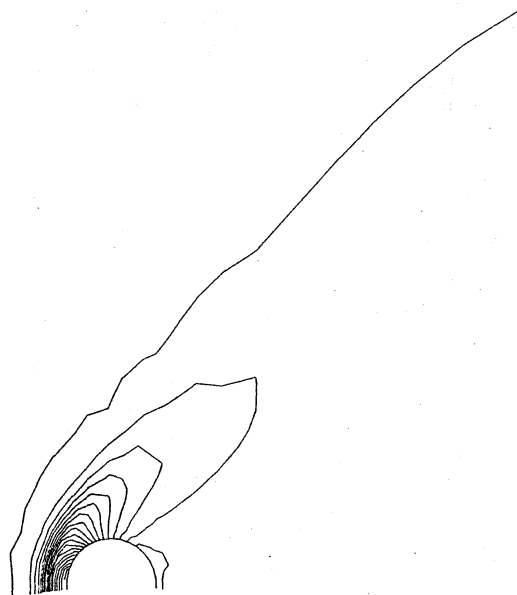
(a) - 等密度線

$\rho = 3.9 \sim 0.385$ を 20 等分



(b) - 等圧線

$p = 1.48 \sim 0.116$ を 20 等分



(c) - 速度場

最長の矢が
速さ = 1.0 を表
わす。

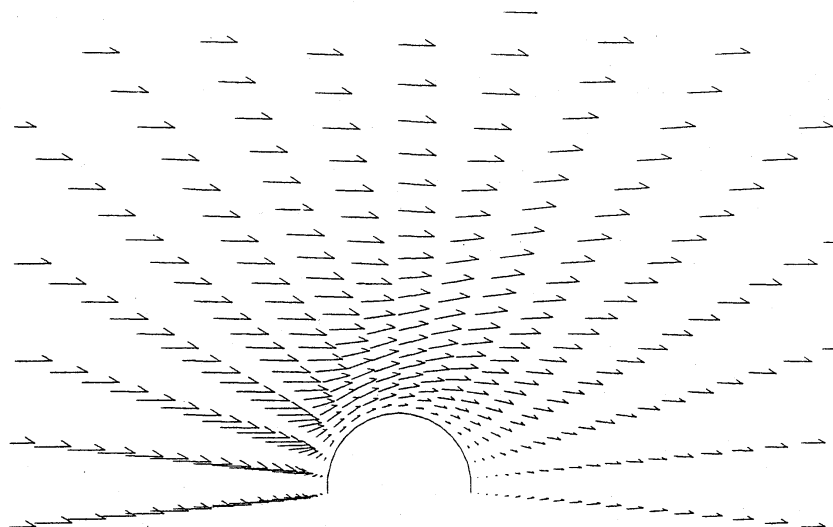
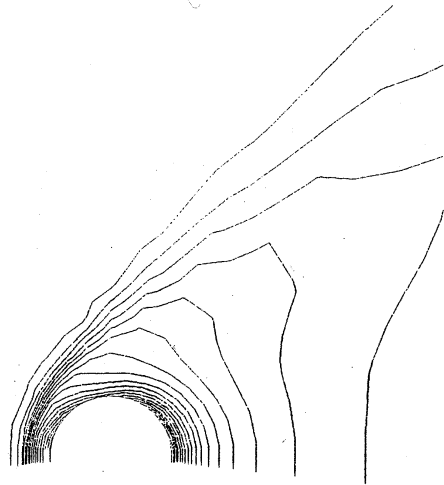


図 - 10. $Re=20$, $\Gamma=0.85$, $M_\infty=2.0$

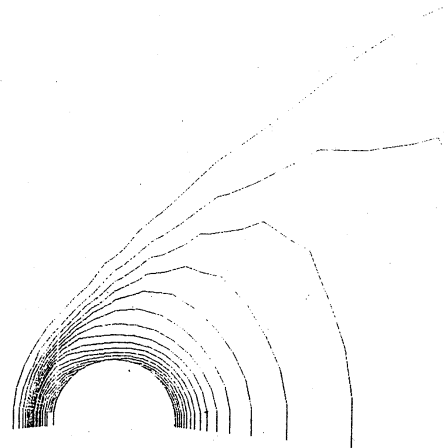
(a) - 等密度線

$\rho = 7.0 \sim 0.87$ を 20等分



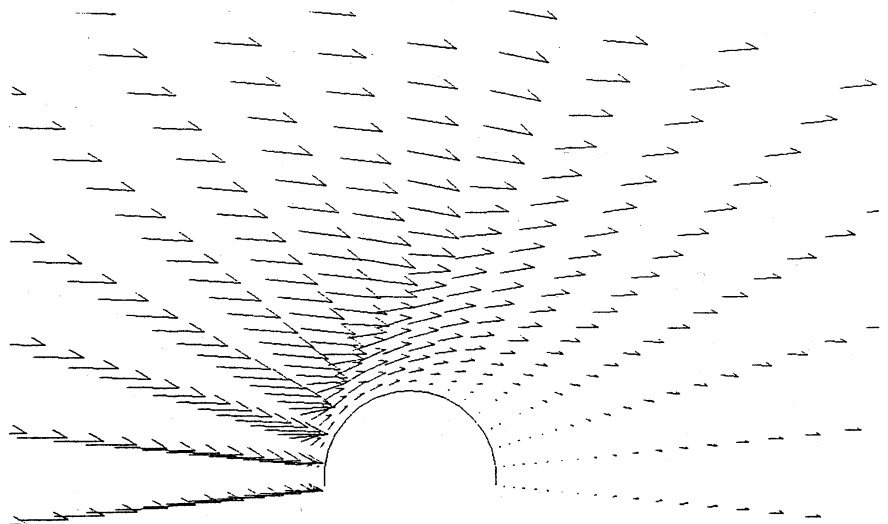
(b) - 等圧線

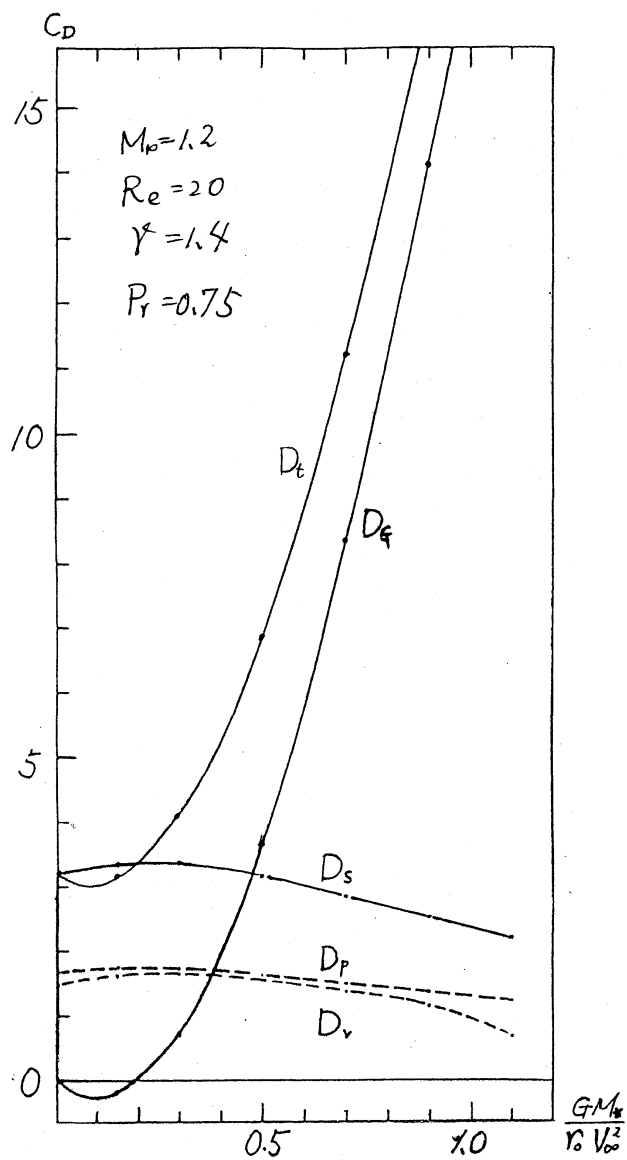
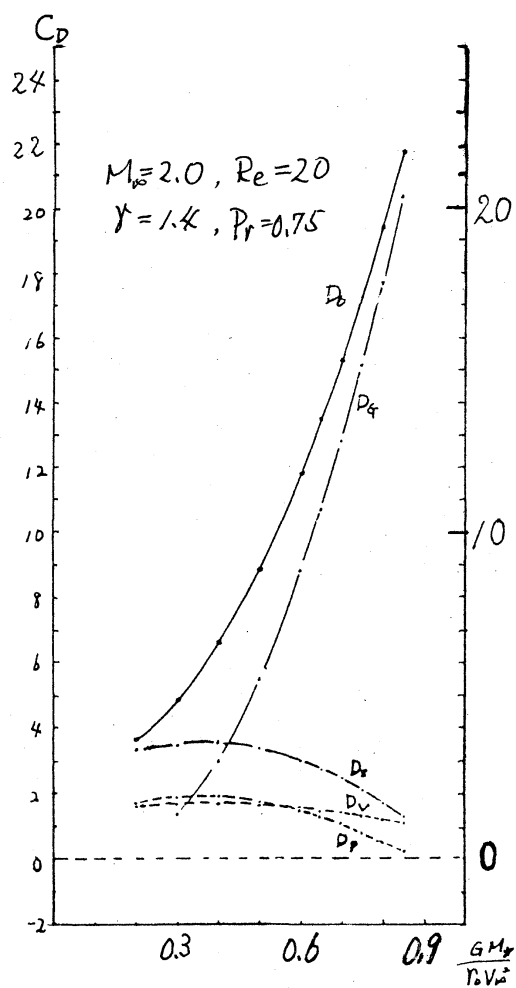
$P = 3.2 \sim 0.43$ を 20等分



(c) - 速度場

矢の最長の
ものが速さ = 1.0
を表わす。



(a) $M_\infty = 1.2$ (b) $M_\infty = 2.0$

図・11. 抵抗係数の $T (= \frac{GM}{r_0 V_\infty^2})$ 依存性 - (超音速流)

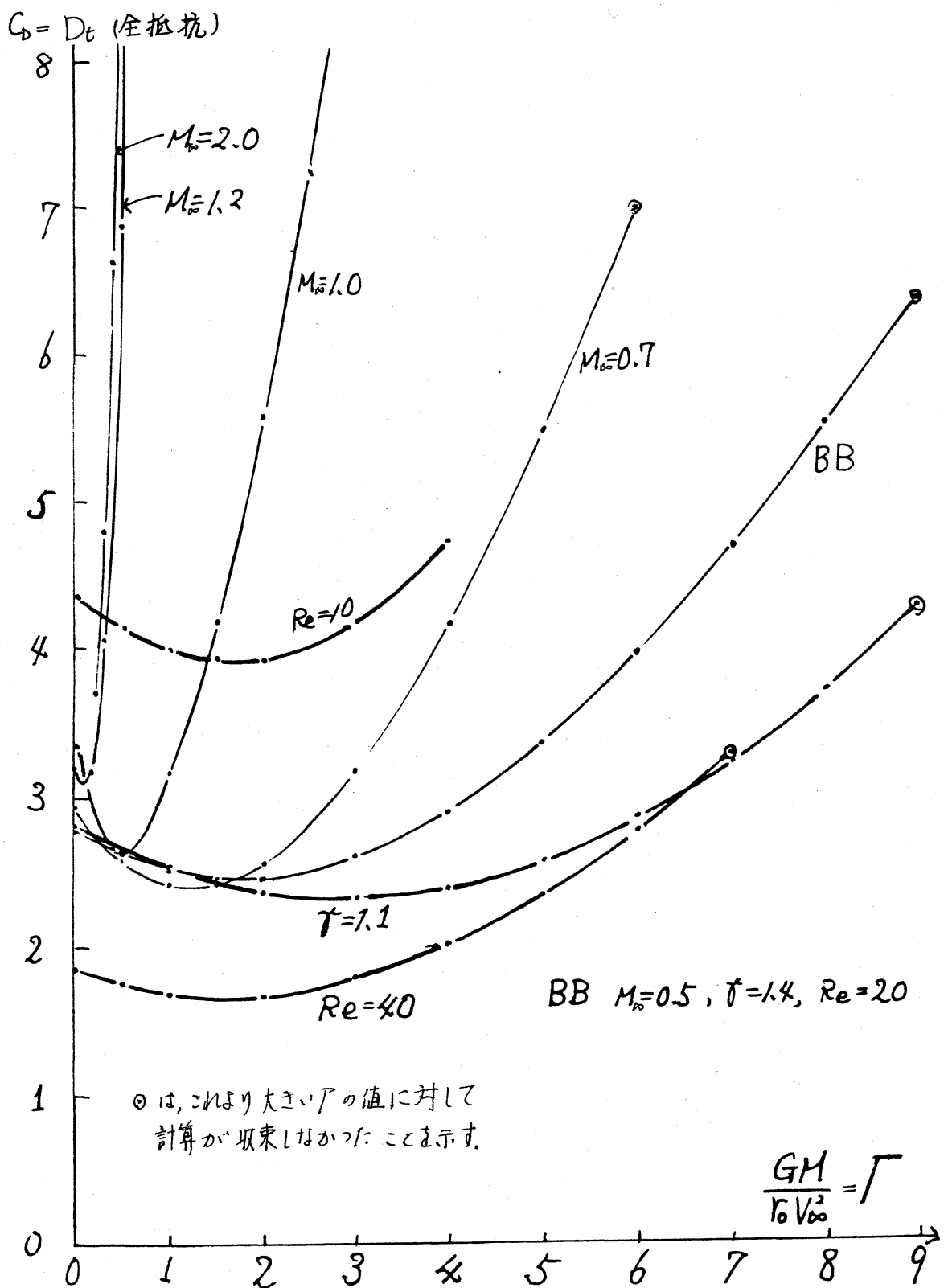


図 - 12 $C_D = D_t$ (全抵抗値) の Γ 依存性, 曲線 BB を基準とする。